ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III
Cuarto parcialito / 24-JUL-2020

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser falso justificar o mostrar un contraejemplo. Es importante recordar que un flujo de una red es una función de flujo de sus aristas y un flujo máximo refiere a un flujo cuyo valor es máximo entre todos los flujos de la red en cuestión.

   a) El valor de un flujo máximo de la red es menor estricto a la capacidad de cualquier corte.
   b) Si el flujo no es máximo entonces tiene que existir un camino de aumento.
   c) Dado un flujo máximo, existe por lo menos un camino de la fuente al sumidero tal que el flujo de las aristas coincide con su capacidad.
   d) Si el flujo máximo es único, entonces el corte de mínima capacidad es único.
   e) Puede existir un flujo máximo en el que haya flujo saliente del sumidero.

2. En un colegio cada materia está a cargo de un único profesor, cada profesor tiene una o más materias a cargo, y cada alumno cursa una o más materias. Los resultados a fin de año son muy malos y todos los alumnos desaprobaron todos las materias. Las autoridades del colegio deciden remediar esta situación tomando medidas necesarias para no dar una mala imagen y quedarse sin alumnos. Establecen ciertas restricciones como objetivo.

   - El i-ésimo profesor no puede desaprobar a más de $x_i > 0$ alumnos entre todas las materias a su cargo para no ser considerado “profesor excesivamente severo”.
   - La j-ésima materia no puede tener más de $y_j > 0$ alumnos desaprobados para no ganarse la fama de “materia excesivamente difícil”.
   - El k-ésimo alumno no puede desaprobar más de $z_k > 0$ materias para no quedar libre.

   Para poder cumplir estas restricciones, el colegio va a regalar nota a algunos alumnos en ciertas materias. Es claro que siempre se logra esto aprobando a todos los alumnos en todas las materias pero esto sería demasiado “poco serio”. Por eso, quieren minimizar la cantidad de alteraciones que se deben aplicar para satisfacer las restricciones establecidas. Resolver el problema utilizando el algoritmo de flujo máximo para determinar a cuáles alumnos de cada materia regalarles nota (minimizando la cantidad de regaladas) a fin de que se cumpla el objetivo de las autoridades del colegio. Mostrar la correctitud y determinar la complejidad del algoritmo propuesto. Justificar.
   Sugerencia 1: Modelar los profesores, las materias y los alumnos como vértices del grafo.
   Sugerencia 2: Minimizar la cantidad de notas regaladas es equivalente a maximizar la cantidad de desaprobaciones.

3. *a*) Sea $\pi_1 \in P$ y $\pi_2 \in NP$. Es cierto que $\pi_1 \neq \pi_2$?
   b) Si π_1 es NP-completo. Es cierto que cualquier problema π_2 se reduce a π_1?
   c) Si π_1 y π_2 son dos problemas NP-completos. Es cierto que π_1 se reduce a π_2?
   d) Si $\pi_1 \in NP$ y π_2 es NP-completo. Es cierto que π_1 se reduce a π_2?
   e) Si $\pi_1 \in NP$ y π_2 es NP-completo. Es cierto que π_2 se reduce a π_1?
   f) Si $\pi_1 \in NP$, $\pi_2 \in P$ y π_2 se reduce a π_1. Qué se puede concluir?
   g) Si π_1 es NP-completo, $\pi_2 \in NP$ y π_1 se reduce a π_2. Qué se puede concluir?

4. Encontrar una reducción polinomial de Π_1 a Π_2. Demostrar que es polinomial y su correctitud.

   Π_1: Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$ y un entero $k < |V_G| - 1$.
   Devuelve si existe un camino simple de k aristas en G.

   Π_2: Dado un grafo $H = (V_H, E_H)$, un entero $l < |V_H| - 1$ y dos vértices s y t.
   Devuelve si existe un camino simple de l aristas en H de s a t.